

# ANALYSE DE FORMES DÉFORMÉES

**Muriel MATTENET\***  
**Jean-Michel JOLION\***

**RÉSUMÉ** Cet article introduit la notion d'empreinte digitale de contour. Cette nouvelle représentation de formes permet une mise en évidence rapide et robuste des ressemblances et différences structurelles entre des contours. Des exemples sont présentés dans le cadre de comparaison de tracés de cartes de France.

• CONTOUR • EMPREINTE DIGITALE  
• MULTIRÉSOLUTION • RECONNAISSANCE  
DE FORMES • REPRÉSENTATION

**ABSTRACT** This paper presents the fingerprint of a contour technique. It is a new representation allowing a fast and robust extraction of structural differences and resemblances between shapes. The examples shown are a part of a comparison of contour drawings of France.

• CONTOUR • FINGERPRINT • MULTIRE-  
SOLUTION • PATTERN RECOGNITION  
• REPRESENTATION

**RESUMEN** Este artículo introduce la noción de huella digital de contorno. Esta nueva representación de formas permite evidenciar rápida y vigorosamente las semejanzas y diferencias estructurales entre contornos. He aquí algunos ejemplos en el marco de una comparación de trazados de mapas de Francia.

• CONTORNO • HUELLA DIGITAL  
• MULTIRESOLUCIÓN • RECONOCIMIENTO  
DE FORMAS • REPRESENTACIÓN



## 1. Contours de l'Afrique: fin (a), grossier (b), fin mais erroné (c)

Dans un article récent (Le Roux, 1990), A. Le Roux présentait les résultats d'une étude sur le savoir géographique d'élèves en première année de classe préparatoire littéraire. Tout particulièrement, il était demandé à ces élèves de dessiner

une carte de France. Quelques contours étaient montrés comme représentants d'une typologie. Celle-ci était essentiellement établie sur des critères qualitatifs (forme bien reconnaissable, reconnaissable, simplifiée, atypique). Nous intro-

duisons, dans cet article, un outil mathématique connu sous le nom d'empreinte digitale de contour, qui met en évidence les différences entre éléments de cette typologie et donne accès à des moyens simples de quantifier ces différences.

\* Laboratoire d'Informatique des Systèmes de Production Industrielle, Bât. 710, Université Claude Bernard, Lyon I, Villeurbanne.



## 2. Point d'inflexion

P est le point d'inflexion pour l'échantillonnage fin ( $x$ ) mais pas pour l'échantillonnage grossier.

L'appréciation d'une forme dépend très souvent de la distance à laquelle celle-ci est perçue ou, en d'autres termes, du niveau de détails que celle-ci contient. La figure 1 présente trois représentations du continent africain. Les deux premières proviennent de deux pas de numérisation, l'un fin (a) et l'autre grossier (b). Ces contours sont différents; cependant, ils sont identiques d'un point de vue conceptuel car ils représentent bien le même continent. Par contre, le troisième contour (c), bien que très fin, présente une différence conceptuelle plus importante (absence de la corne somalienne). Le but de la construction des empreintes digitales est de fournir un outil permettant une mesure de différence entre contours rendant compte plus de leur forme que de la précision de leur tracé.

## Le principe de construction d'une empreinte digitale de contour

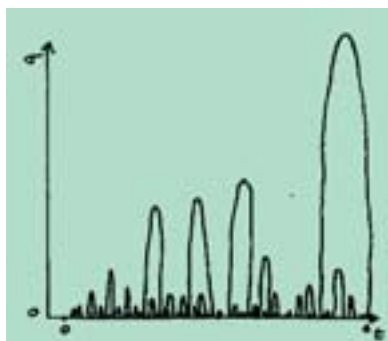
On appelle empreinte digitale (ED) d'un contour fermé, la fonction d'évolution de la position des détails du contour dans l'espace des résolutions. Qu'est-ce qu'un détail? Qu'est-ce que l'espace des résolutions?

Un détail est présent en un point P si le contour change de courbure en P (P est un point d'inflexion). L'existence d'un détail est directement liée au nombre de points servant à décrire le contour. Sur la figure 2, le point P n'est point d'inflexion que pour le plus fin des échantillonnages du contour. Une réduction de l'échantillonnage est équivalente à un lissage du contour qui fait disparaître les détails les plus fins d'abord. On conçoit aisément que, plus le point d'inflexion sera important, plus il sera résistant à une réduction de l'échantillonnage (ou filtrage du contour). C'est



### 3 a. Contours filtrés avec $\sigma$ croissant

Le contour tend vers une forme elliptique de taille décroissante.



### 3 b. ED déduite des contours de 3 a

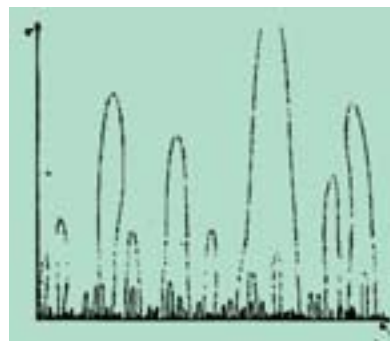
cette propriété de survie variable des points d'inflexion que la technique des ED exploite pour séparer détails locaux et globaux.

Le détail du modèle mathématique ainsi que les équations principales permettant le calcul de l'ED d'un contour sont regroupés en annexe. Retenons que le filtrage d'un contour dépend d'un paramètre  $\sigma$  (plus  $\sigma$  est grand, plus le contour est filtré et plus les détails disparaissent). À titre d'exemple, la figure 3a présente le contour de l'Afrique filtré avec différentes valeurs de  $\sigma$ . Plus  $\sigma$  augmente, plus le contour s'éloigne de l'original pour tendre vers une forme lisse sans détail. La figure 3 b est l'empreinte digitale de cet ensemble de contours obtenue par détection des passages par zéro de  $\kappa(t, \sigma)$  pour toutes les valeurs de  $\sigma$  (cf. annexe). Les



### 4 a. Contour de référence de la France

Les points noirs sont les points caractéristiques déduits de l'empreinte digitale de la figure 4 b.

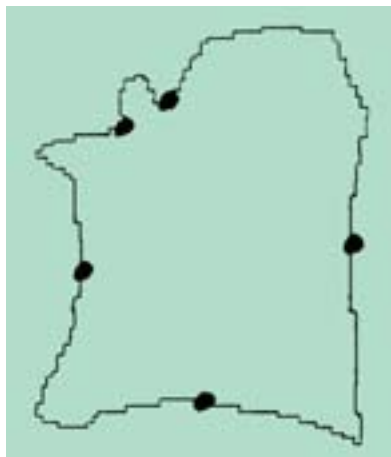


### 4 b. ED du contour de référence 4 a

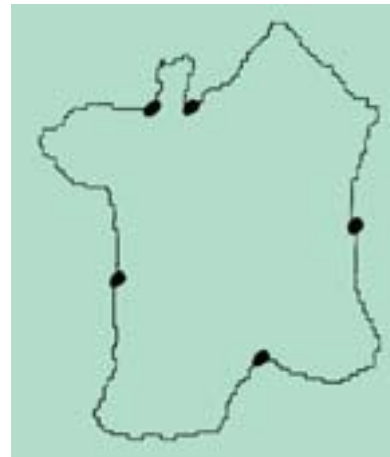


### 4 c. Contour simplifié de la France

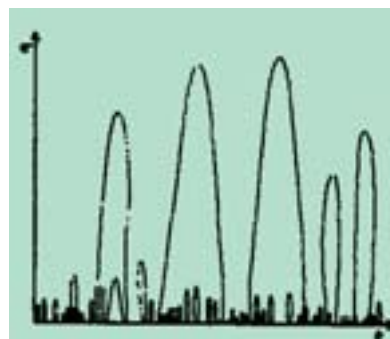
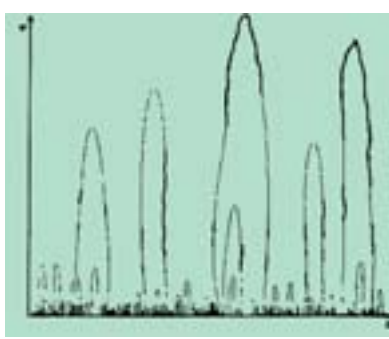
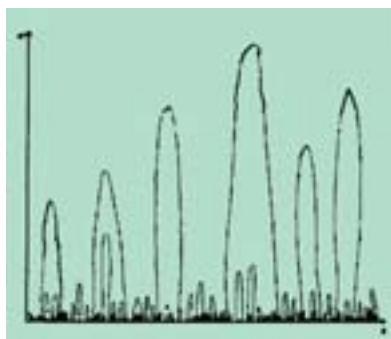
courbes, dont la forme rappelle celle d'une empreinte digitale, traduisent le déplacement de la position des points



5 a & b. Contours de France classés «très reconnaissables»



5 c. Contour de France «reconnaissable»



6 a, b & c. Empreintes digitales de contours de France a, b & c

d'inflexion et le niveau de résolution où ils disparaissent (le plus souvent par fusion avec un autre point d'inflexion). Les quatre courbes principales de la figure 3 b indiquent que le contour initial peut être décomposé en quatre éléments principaux de courbures constantes. La position du maximum de chaque courbe est le point de passage entre ces éléments. Ils sont représentés par des croix sur le contour initial (fig. 1a).

Bien sûr, il est possible de décrire le contour avec plus de détails en prenant les autres courbes de l'ED (il sera alors nécessaire d'utiliser plus de points pour représenter un niveau de résolution plus fin). Si tous les points d'inflexion sont pris en compte, le contour initial est parfaitement reconstitué. Le codage de l'ED est donc un codage sans perte d'information. Ce codage fournit une description hiérarchique d'une forme

qui permet une mise en évidence très rapide des éléments structurels les plus importants. Deux courbes voisines, d'un point de vue global, auront la même ED pour  $\sigma > \sigma_0$ .

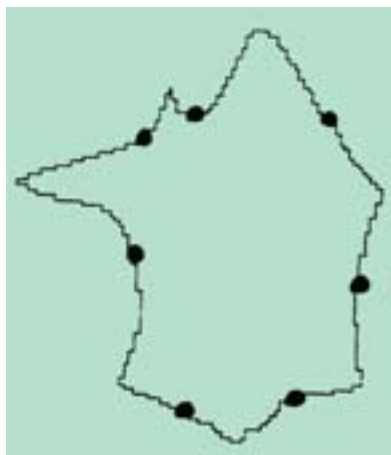
#### Application à la comparaison de cartes de France

Les figures 4 présentent une carte de France scannée avec précision (a) et son ED (b). Le contour est parcouru en partant du point le plus au nord, dans le sens des aiguilles d'une montre. Les huit pics les plus importants sont représentés par un point noir sur le contour initial. À partir de ces points, on obtient facilement un contour schématisé de la France (fig. 4 c). Cette ED sert de référence pour l'analyse des contours suivants. La figure 5 regroupe cinq cartes de France scannées en moyenne sur 500 points à partir de l'article de A. Le Roux.

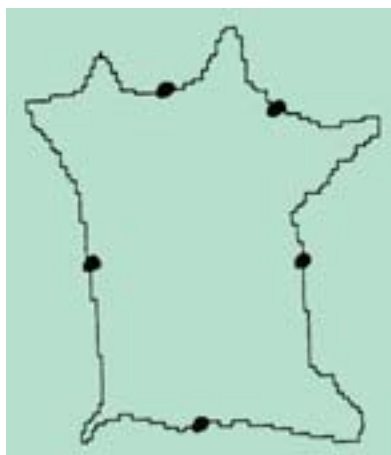
Chaque contour est parcouru comme décrit précédemment. Les empreintes digitales sont présentées à la figure 6.

Les deux premières (fig. 5 a & b) ont été classées «très reconnaissables». L'analyse des ED confirme ce classement. En effet, les cinq pics majeurs sont détectés et bien localisés. De plus, les amplitudes relatives de ces pics sont assez bien conservées, surtout pour la partie ouest des cartes. L'affectation de ces deux cartes à la même classe se justifie amplement lorsque l'on constate la similarité entre leurs ED, plus marquée que celle des deux contours de départ.

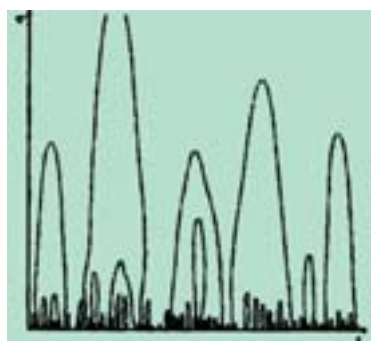
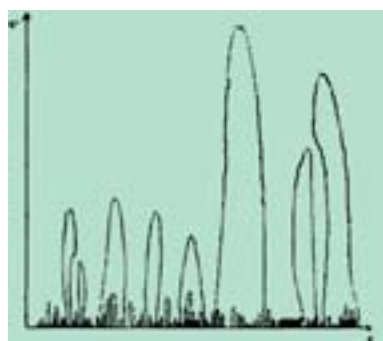
La carte 5 c est classée «reconnaissable». Les cinq pics majeurs sont toujours bien détectés et bien localisés. Par contre, les amplitudes ne sont pas respectées, ce qui traduit un affaiblissement des courbures et la disparition des formes courbes au profit de segments de droites.



5 d. Contour de France «simplifié»



5 e. Contour de France «atypique»



6 d & e. Empreintes digitales de contours de France d & e

La carte 5 d est classée «simplifiée». On détecte plus de pics dont la localisation est proche de la carte de référence. Cependant, pour les premiers pics (partie orientale de la carte), l'amplitude est constante et faible, traduisant une schématisation de la carte par des segments de droites. Par contre, la partie occidentale, comme sur toutes les cartes précédentes, est bien conservée. L'aspect «simplifié» de cette partie est quantifiable par l'absence de courbes internes aux trois courbes majeures, traduisant le fait que chaque courbure est très «pure».

La carte 5 e, classée «atypique», est très différente des précédentes. Les parties sud et ouest sont relativement bien représentées (quatre pics, mais celui du sud a une amplitude trop élevée). Par contre, l'est fait apparaître deux pics avec une amplitude bien trop élevée, qui traduit la pointe alsacienne dessinée par l'étudiant.

Cette rapide analyse qualitative met en évidence les potentialités de cette nouvelle représentation. Grâce aux empreintes digitales, il est possible d'appuyer le classement sur des critères simples à valider dans cette représentation en utilisant le nombre, la localisation et l'amplitude des  $k$  plus importants pics.

#### Autres applications

Il est tout à fait possible d'envisager d'autres applications, toujours dans le domaine des cartes. Les principales sont les suivantes. Tout d'abord, l'exemple détaillé au paragraphe précédent peut être généralisé. En effet, il est très facile avec cette technique de comparer des cartes d'une même région (État ou continent par exemple) construites à des époques différentes de notre histoire (Kish, 1980). Les cartes peuvent être numérisées dans

des conditions expérimentales identiques. On peut alors, de la densité (nombre de points) de la partie basse de l'empreinte digitale, déduire une information sur la connaissance de l'homme sur la région étudiée. Cette mesure est en effet liée à la quantité de détails contenue dans la carte. L'ED permet ici facilement l'accès à une mesure quantitative explicite d'une information répartie dans le contour.

Ensuite, l'automatisation de la comparaison d'un contour avec des contours de référence est une technique qui peut être envisagée (Mokhtarian, 1986). En phase d'apprentissage, comme sur l'exemple des cartes de France exposé précédemment, il est possible de déduire le nombre de pics souhaitable et le niveau de filtrage minimum à introduire sur tout contour à analyser (en phase de test, seule la partie haute de l'empreinte digitale sera calculée). Lors de cette phase, des règles simples sont utilisées. Le pic principal sert de point de référence pour le recalage des contours rendant ainsi la comparaison indépendante de la position du premier point lors du scannage. Le ratio entre les amplitudes des pics principaux donne accès au facteur d'échelle et permet ainsi un autre type de recalage des données. Enfin, la reconnaissance peut être partielle si l'on ne dispose que d'un morceau de contour (la côte bretonne par exemple). Cette technique peut donc être très utile pour la consultation et la mise à jour de bases de données informatiques en cartographie. En particulier, le dernier aspect présenté permet la mise en correspondance entre des contours issus d'images satellites et des cartes de type IGN.

Par comparaison de contours, il est possible de suivre l'évolution d'une zone géographique particulière. Une collaboration sur ce thème est en cours d'élaboration entre le Laboratoire d'Informatique des Systèmes de Production Industrielle et l'École Nationale Supérieure Polytechnique de Yaoundé pour le suivi du couvert forestier du Cameroun.

### Annexe: Construction d'une empreinte digitale

Soit C un contour fermé dont on dispose d'une représentation paramétrique  $\{(x(t),y(t)), t \in [0,1]\}$ . Dans un premier temps, on suppose le contour continu (*i.e.* t peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 1). Les détails sont supprimés par lissage de la courbe C par un filtre  $g_\sigma$  où  $\sigma$  est caractéristique de la quantité de filtrage. On reviendra ultérieurement sur le choix de  $\sigma$ . La représentation paramétrique du nouveau contour  $C_\sigma$  est alors:

$\{(x * g_\sigma)(t), (y * g_\sigma)(t), t \in [0,1]\}$  où \* représente l'opérateur de convolution.

Le point P  $(x(t),y(t))$  est un point d'inflexion si la courbure  $\kappa$  change de signe en P.  $\kappa$  est obtenue par:

$$\kappa(t,\sigma) = \frac{x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{3/2}}$$

où  $x'$  (resp.  $y'$ ) et  $x''$  (resp.  $y''$ ) représentent les dérivées première et seconde de la fonction x (resp. y). Ces dérivées doivent être évaluées pour tout contour  $C_\sigma$ . Une propriété très intéressante du produit de convolution simplifie cependant les calculs. En effet, on peut montrer que:

$$(x * g)' = x * g' \text{ (et donc } (x * g)'' = x * g'')$$

Les fonctions  $g_\sigma'$  et  $g_\sigma''$  seront tabulées préalablement pour accélérer les calculs.

Le choix du filtre est délicat. Cependant, si l'on impose des contraintes simples comme le fait qu'un détail ne puisse apparaître nulle part lorsque l'on simplifie le contour, alors on peut montrer (Badaud, 1986) que le filtre optimal est le filtre gaussien d'écart type  $\sigma$  (plus  $\sigma$  est élevé, plus le filtrage est important):

$$g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

Le produit de convolution entre deux fonctions f et g, dans le domaine continu est défini par:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(x-u) \cdot du$$

Dans le cas de contours discrets (*i.e.* C est connu par n points équirépartis  $(x(i),y(i)), i = 0, n-1$ ), le produit de convolution s'obtient par:

$$x_\sigma(i) = \sum_{k=-n/2}^{k=n/2} x(i-k) \cdot g_\sigma(k)$$

où l'indice  $i-k$  est géré modulo n. Les fonctions  $g_\sigma$ ,  $g_\sigma'$  et  $g_\sigma''$  ont la propriété de décroître très rapidement vers 0 lorsque k augmente. De ce fait, une bonne approximation de  $x_\sigma$  peut être obtenue rapidement en limitant les variations de k dans l'intervalle  $[-3\sigma; 3\sigma]$ . Il en est de même, bien sûr, pour les autres fonctions nécessaires au calcul de la courbure.

L'empreinte digitale du contour est formée par les passages par zéro de la fonction courbure  $\kappa(t,\sigma)$ . La figure 4 est un exemple d'une telle fonction.

### Références bibliographiques

BADAUD J., WITKIN A. P., BAUDIN M. et DUDA R. O., 1986, «Uniqueness of the Gaussian Kernel for Scalespace Filtering», *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-8, n° 1, pp. 26-33.  
KISH G., 1980, *La carte: images des civilisations*, Paris, Le Seuil.

LE ROUX A., 1990, «L'après-lycée ou les mésaventures cartographiques d'élèves de classe préparatoire», *Mappemonde*, n° 3, pp. 2-6.  
MOKHTARIAN F. et MACKWORTH A., 1986, «Scale-Based Description and Recognition of Planar Curves and Two-Dimensional Shapes», *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. PAMI-8, n° 1, pp. 34-43.